

Matrizes e sistemas lineares

Sistemas lineares e matrizes com significado: substituição, adição, número de soluções, determinante e produto de matrizes, com gráficos e questões de ENEM, vestibular e SAT.

Um sistema de duas equações com duas incógnitas pergunta: **que par (x, y) satisfaz as duas ao mesmo tempo?** Cada equação é uma reta, e a solução é o ponto onde elas se cruzam. Se as retas são paralelas, não há solução; se são a mesma reta, há infinitas. A matriz é só uma tabela que guarda os coeficientes, e o **determinante** diz se a solução é única.

Regra 1

Substituição e adição

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases} \Rightarrow 2x = 14$$

Substituição: isole uma letra e troque na outra equação. **Adição:** multiplique equações para que uma letra suma ao somar. Sempre confira o par nas **duas** equações.

Regra 2

Quantas soluções?

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \rightarrow 1 \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \rightarrow 0$$

Inclinações diferentes: retas concorrentes, **uma** solução. Mesma inclinação e interceptos diferentes: paralelas, **nenhuma**. Equações proporcionais: mesma reta, **infinitas**.

Regra 3

Determinante e produto

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$(AB)_{ij} = \text{linha } i \text{ de } A \cdot \text{coluna } j \text{ de } B$$

Determinante $\neq 0$: o sistema tem solução única. O produto AB só existe se o número de colunas de A for igual ao de linhas de B ; e em geral $AB \neq BA$.

Exemplos resolvidos, passo a passo

Exemplo resolvido: Galinhas e coelhos

Num sítio há galinhas e coelhos, num total de 35 cabeças e 94 patas. Quantos são os coelhos?

1. $g = 35 - c$. Substituindo: $2(35 - c) + 4c = 94$.
2. $70 + 2c = 94 \Rightarrow c = 12$.
3. $g = 23$. Conferindo: $23 + 12 = 35$ cabeças e $46 + 48 = 94$ patas ✓.

Resposta: 12 coelhos (e 23 galinhas)

Exemplo resolvido: O atalho de somar as equações

Se $2x + 3y = 17$ e $3x + 2y = 13$, calcule $x + y$, depois $x - y$, e por fim x e y .

1. Somando: $5(x + y) = 30 \Rightarrow x + y = 6$.
2. Segunda menos primeira: $x - y = 13 - 17 = -4$.
3. Somando $x + y = 6$ e $x - y = -4$: $2x = 2$, $x = 1$ e $y = 5$. Conferindo: $2 + 15 = 17$ ✓.

Resposta: $x + y = 6$, $x - y = -4$, $x = 1$, $y = 5$

Erros que custam pontos

Substituir sem parênteses

× Errado

$$x = y + 1 \text{ em } 2x + 3y = 12: \\ 2y + 1 + 3y = 12$$

✓ Certo

$$\text{Substitua com parênteses e distribua: } 2(y + 1) + 3y = \\ 2y + 2 + 3y.$$

Multiplicar só um lado da equação

× Errado

$$x + 2y = 5 \text{ vezes } 3: 3x + \\ 6y = 5$$

✓ Certo

Multiplique **todos** os termos, dos dois lados: $3x + 6y = 15$.

Error o sinal no determinante

× Errado

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 3 = 5$$

✓ Certo

$$ad - bc = 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = \\ 8 + 3 = 11.$$

Multiplicar matrizes elemento a elemento

× Errado

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 21 & 32 \end{pmatrix}$$

✓ Certo

É linha vezes coluna: $\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$ (ex.: $1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 19$).